§ ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ

ΕΡΩΤΗΜΑ Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έστω $a \in \mathbb{R}$. Ποια είναι η γεωμετρική δομή που έχει το σύνολο

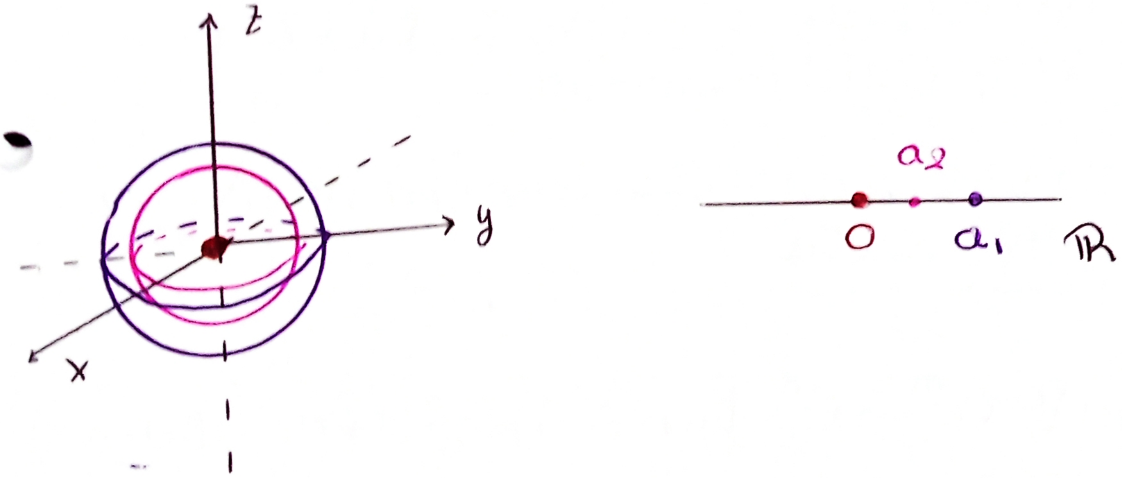
$$\Sigma = f^{-1}(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = a\}$$

Με άλλα λόγια το ερώτημα είναι υπό ποιες προϋποθέσεις το σύνολο Σ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα του $\mathbb{R}^n$;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Ποια είναι τα σύνολα

$$\Sigma = f^{-1}(a),\ a \geq 0.$$

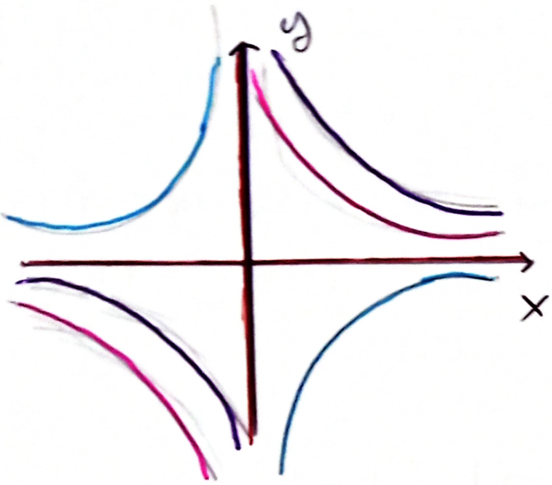
Το Σ είναι τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ με $x^2+y^2+z^2 = a$

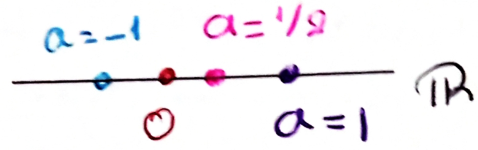


Παρατηρούμε ότι για $a>0$ έχουμε σφαίρες και ότι για $a=0$ έχουμε σημείο.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=xy$. Το ερώτημα είναι ποια είναι τα σύνολα $\Sigma_a = f^{-1}(a)$, όπου $a\in\mathbb{R}$.





Παρατηρούμε ότι το Σ_a είναι πολύπτυγμα όταν $a\neq 0$ και δεν είναι πολύπτυγμα όταν $a=0$.

Γενικό Ερώτημα Ας υποθέσουμε ότι $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δύο πολυπτυγμάτων. Υπό ποιες προϋποθέσεις το σύνολο $\Sigma = f^{-1}(z)$, όπου $z\in N$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα.

Πριν δώσουμε απάντηση στο ερώτημα πρέπει να εισάγουμε έναν ορισμό.

Ορισμός

Έστω ότι $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ πολυπτυγμάτων.

α) Σημεία $p\in M^m$ όπου $\operatorname{rank} f_p < \dim N$ ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f.
Όλα τα υπόλοιπα σημεία θα λέγονται κανονικά.

β) Ένα σημείο $q\in N^n$ ε.ω. το $f^{-1}(q)$ περιέχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο λέγεται κρίσιμη τιμή. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του N^n λέγονται κανονικές τιμές.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=xy$

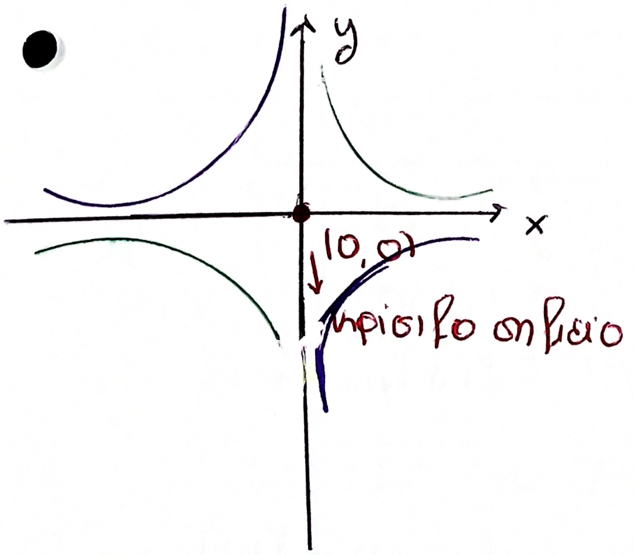
$M^2=\mathbb{R}^2$ και $N^1=\mathbb{R}^1$

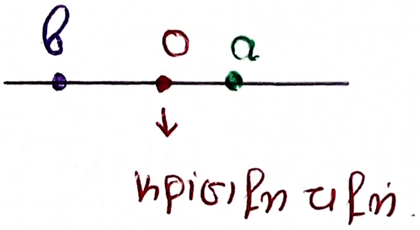
Επίσης, $df_{(x,y)} \sim \nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (y, x)$

Σε αυτή την περίπτωση τα κρίσιμα σημεία είναι εκείνα που $\operatorname{rank} df_{(x,y)} = 0$

Ισοδύναμα, κρίσιμα σημεία είναι εκείνα που $\nabla f = (0,0)$. Επομένως $(0,0)$ κρίσιμο σημείο και όλα τα υπόλοιπα είναι κανονικά.

Επίσης, μόνο το 0 είναι κρίσιμη τιμή της f (αφού το $f^{-1}(0)$ περιέχει το $(0,0)$) και όλα τα υπόλοιπα σημεία είναι κανονικές τιμές.





ΘΕΩΡΗΜΑ

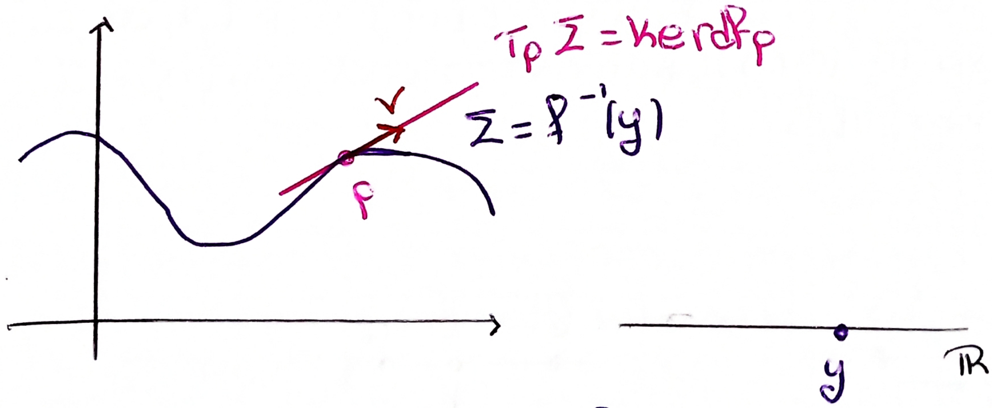
Έστω $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ πολυπτυγμάτων με διαστάσεις
$m = \dim M^m \geq \dim N^n = n$
Εάν $y \in N^n$ είναι κανονική τιμή, τότε το σύνολο

$\Sigma = f^{-1}(y) \subseteq M^m$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα με διάσταση $m-n$. Επιπλέον,

$$\boxed{T_p \Sigma \equiv \ker f_p}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Ας υποθέσουμε ότι $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $y \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της f. Σύμφωνα με το Θεώρημα, το σύνολο $\Sigma = f^{-1}(y)$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα με διάσταση $n-1$.



Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα, ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο $p \in \Sigma$ είναι $\ker df_p$. Άρα εάν $v \in T_p\Sigma$, τότε $df_p(v) = 0$
Όμως, $df_p(v) = \langle v, \nabla f(p) \rangle = 0$
Αυτό σημαίνει ότι το v είναι κάθετο στο $\nabla f(p)$.
Με άλλα λόγια, η κλίση $\nabla f(p)$ είναι κάθετη σε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα.

Συμπεραίνουμε ότι σε μια τέτοια κατάσταση η κλίση ∇f_p είναι κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\Sigma = f^{-1}(y)$

Παρατήρηση 2

Εάν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$ κανονική τιμή, τότε το πολύπτυγμα $\Sigma = f^{-1}(y)$ λέγεται υπερεπιφάνεια στάθμης της f.

Εφαρμογή

- Ας θεωρήσουμε τη σφαίρα $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 = 1\}$

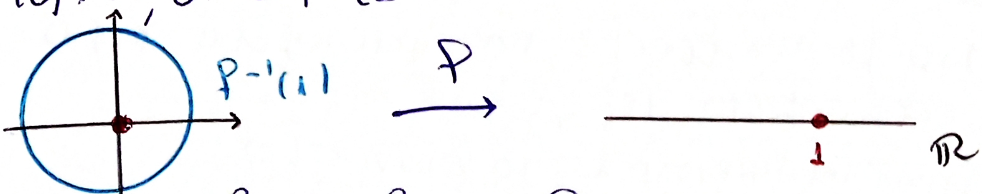
Θα δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1$

Συνεπώς, $S^n = f^{-1}(1)$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα κανονικών τιμών. Αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός 1 είναι κανονική τιμή της f. Υπολογίζουμε

- $df \sim \nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_{n+1}}) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1})$

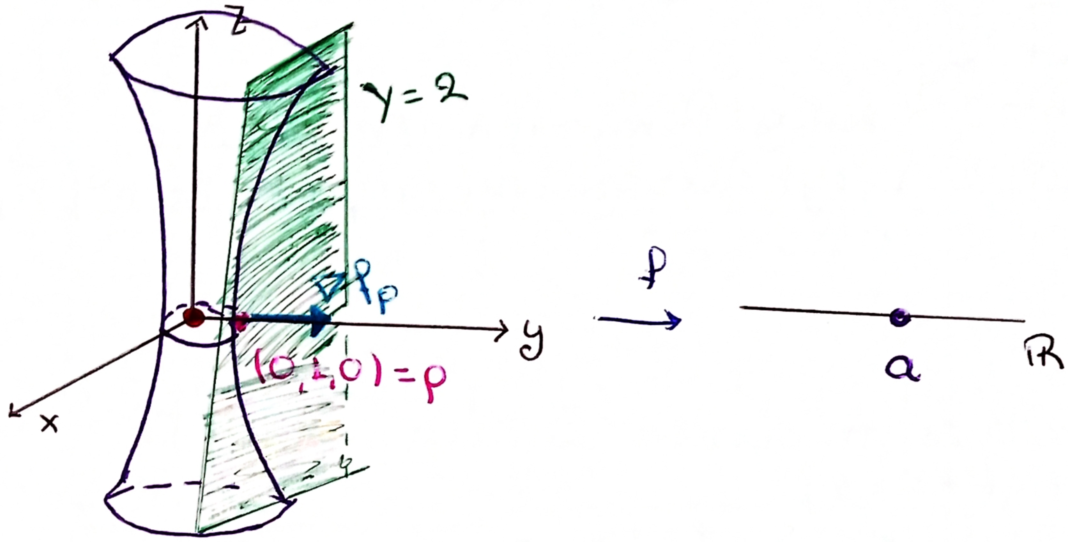
Οπότε το κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, \dots, 0)$. Επίσης, το σημείο 1 είναι κανονική τιμή αφού $(0, \dots, 0) \notin f^{-1}(1)$



Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα κανονικών τιμών, η σφαίρα είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $n+1-1 = n$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=a\}$ $a\neq 0$, είναι πολύπτυγμα διάστασης 2.



Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$. Άρα $\Sigma=f^{-1}(a)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός a είναι κανονική τιμή.

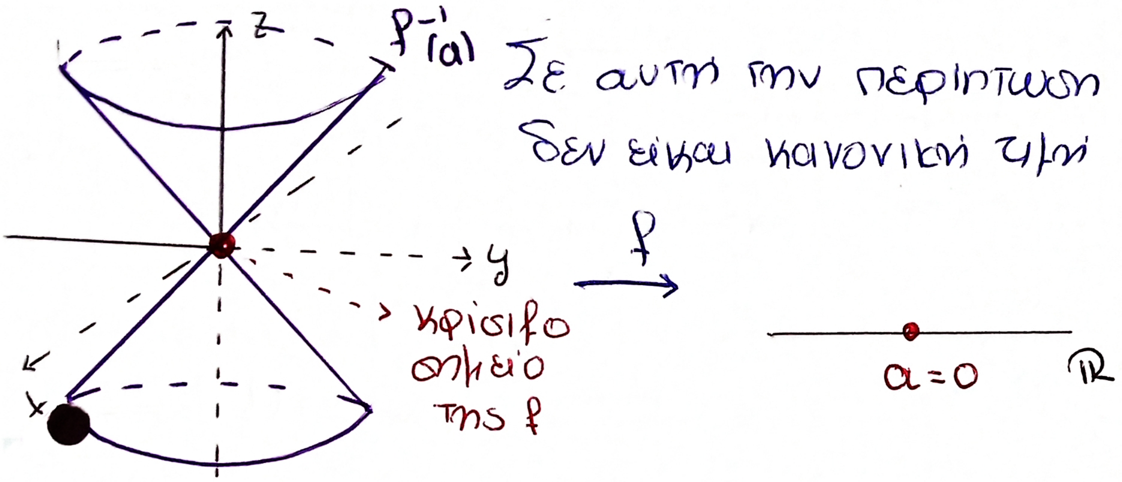
Υπολογίζουμε $\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,-2z)$
Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο της f είναι το σημείο $(0,0,0)$

Αν $a\neq 0$, τότε a κανονική τιμή.
Από το Θεώρημα έπεται ότι $\Sigma=f^{-1}(a)$ πολύπτυγμα διάστασης 2.

* Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τον εφαπτόμενο χώρο της επιφάνειας στο σημείο $(0,1,0)$.
Σύμφωνα, με την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1, το διάνυσμα $\nabla f(0,1,0)$ είναι κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο.
Άρα το διάνυσμα $\nabla f(0,1,0)=(2x,2y,-2z)\big|_{(0,1,0)}$
$=(0,2,0)$. Άρα ο εφαπτόμενος χώρος της επιφάνειας στο σημείο p είναι το επίπεδο $\boxed{y=2}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ας εξετάσουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κανονικών τιμών στο σύνολο $\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0 \}$
Τώρα το σύνολο Σ παριστάνει κώνο.

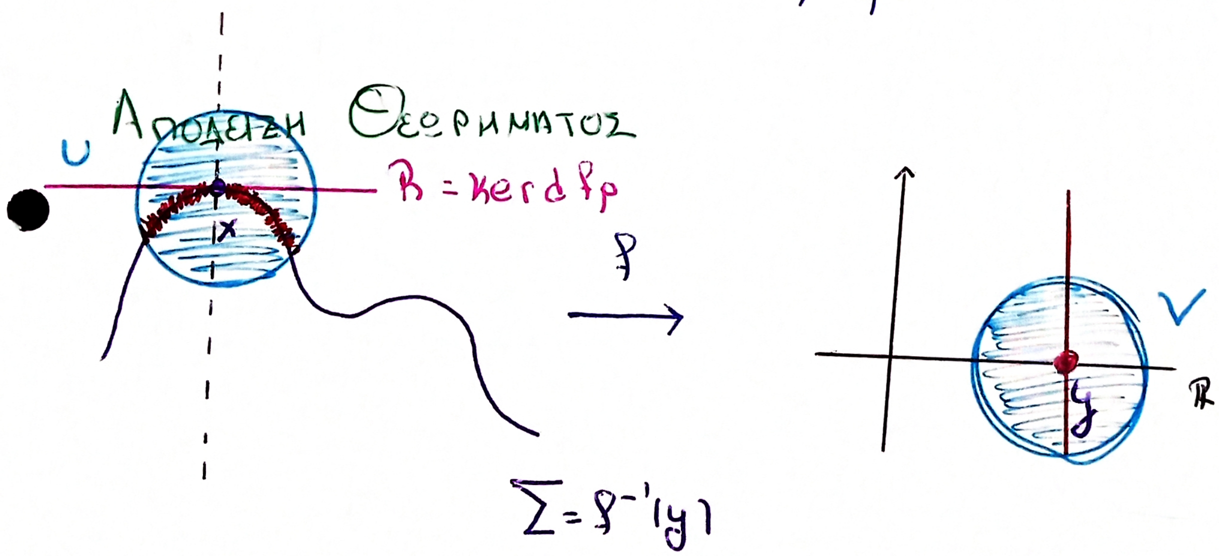


Σε αυτή την περίπτωση το $a=0$ δεν είναι κανονική τιμή

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εικόνα κρίσιμων σημείων της f είναι σύνολο μηδενικών μέτρων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ



Έστω σημείο $x \in \Sigma = f^{-1}(y)$. Επειδή y κανονική τιμή, το διαφορικό df_x είναι επί (αυτό λόγω διαστάσεων)
Δηλαδή, $df_x(T_x M) = T_y N$

Οπότε ο πυρήνας $R = \ker df_x$ θα είναι υπόχωρος του T_xM με διάσταση $m-n$. Εάν $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$, διαλέγουμε μια γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$ η οποία είναι 1-1 - εκφυλισμένη στον υπόχωρο $R = \ker df_x$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $F: M^m \to N^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ με τύπο $F(x) = (f(x), L(x))$

Είναι φανερό ότι η F είναι διαφορομορφισμός

σε περιοχή του x, διότι $dF_x(\xi) = (df_x(\xi), L(\xi))$

Άρα μετασχηματίζει διαφορικά την περιοχή U του x σε περιοχή V του $(y, L(x))$

Παρατηρούμε τώρα ότι $F(f^{-1}(y) \cap U) = (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$

Επομένως, η F απεικονίζει διαφορομορφικά το σύνολο $f^{-1}(y) \cap U$ επί του συνόλου $(\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$.

Αυτό αποδεικνύει ότι ο χώρος $f^{-1}(y)$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $m-n$. Το ότι ο εφαπτόμενος χώρος είναι ο πυρήνας του df_p ($T_p\Sigma = \ker df_p$) προκύπτει για λόγους διάστασης.